JUN 30 1922

Physikalische Zeitschrift

Begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

Herausgeber:
Professor Dr. **M. Born** und
Professor Dr. **P. Debye**

Schriftleiter:
Dr. **Erich Hückel** in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von jährlich 200 Mark, bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband 280 Mark, im Ausland je nach dem Valutastande. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 5.— Mk., Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

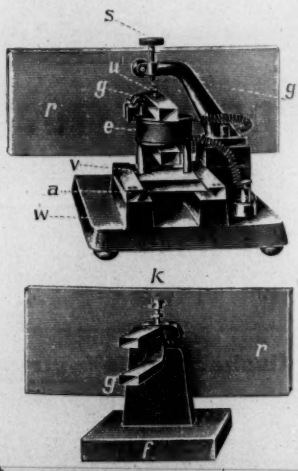
Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten entweder an die Herausgeber: Professor Dr. M. Born, Göttingen, Planckstraße 21, und Professor Dr. P. Debye, Zürich, Physikgebäude, Gloriastr. 35 oder an die Schriftleitung: Dr. Erich Hückel, Göttingen, Bunsenstraße 9, Physikalisches Institut der Universität, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von **S. Hirzel** in Leipzig, Königstraße 2.

No. 10. 15. Mai 1922 No. 614. **23. Jahrgang.**

Phys.-mech. Institut von Prof. Dr. M. Th. Edelmann & Sohn

München.



Stimmgabeln

mit Resonanzkasten und elektrischer Erregung zum Resonanzversuche in größeren Räumen.

Katalog 30 erschienen und ebenso wie Spezialliste No. 29 über Saitengalvanometer und Registrierapparate, Spezialliste No. 31 über einfache Präzisionsschulapparate kostenlos.

Inhaltsverzeichnis:

(T. — Tagesereignisse.)

	Seite
Boguslawski, S., Über einige Grundfragen der kinetischen Wärmetheorie	209
Flüssigkeit-widerstand: Weitere Feststellungen über die Gesetze des —- und Luftwiderstandes, v. C. **Wieselsberger**	219
Luftwiderstand: Weitere Feststellungen über die Gesetze des Flüssigkeits- und —, v. C. **Wieselsberger**	219
v. Reinach-Preis für Mineralogie. (T.)	224
Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1922	224
Wärmetheorie: Über einige Grundfragen der kinetischen —, v. S. **Boguslawski**	209
Wieselsberger, C., Weitere Feststellungen über die Gesetze des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes	219

Verlag von S. HIRZEL in LEIPZIG

Gleichen, A., Leitfaden der praktischen Optik. Mit 158 Abb. Groß-8°. 1906. Geh. M. 54 —, geb. M. 75.—

Zum ersten Male ist hier ein Werk geschaffen worden, das die Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente, ihre Konstruktion und Berechnung unter Anwendung der ersten Elemente der Algebra darstellt und das daher auch den sich mit der praktischen Optik Beschäftigenden verständlich ist, denen das erforderliche Maß mathematischer Kenntnisse zum Studium anderer Werke meist nicht zur Verfügung steht.

In unserem Verlage ist soeben erschienen:

Über die Darstellung des periodischen Systems der chemischen Elemente mittels harmonischer Schwingungen.

Von Prof. Dr. **Karl Fehrle,** Freiburg i. Br., mit 5 graphischen Darstellungen und der vollständigen Tabelle der Fourieranalyse der Restkurve. 48 Seiten. 8°. 1922. Preis M. 15.—

Verlag der Freiburger Druck- u. Verlagsgesellsch. H. M. Muth, m. b. H., Freiburg i. Br.

Neukonstruktionen

geodätischer und sonstiger wissenschaftlicher Instrumente und Apparate übernimmt unter vollster Wahrung des geistigen Eigentumsrechtes des Auftraggebers die

Konstruktions- und Versuchswerkstättenabteilung der INDUSTRIE-NEULAND Aktiengesellschaft

Dachauerstr. 13 MÜNCHEN Tel. 50784

Neuste Konstruktion!

Augenepiskop. D.R.P. 290314.

Franz Schmidt & Haensch

Berlin S. 42, Prinzessinnenstraße 16

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.

Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.

Preislisten kostenlos.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 10. 15. Mai 1922. 23. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 12 am 28. Mai 1922.

INHALT.

Originalmitteilungen:

S. Boguslawski. Über einige Grundfragen der kinetischen Wärmetheorie. S. 209.

C. Wieselsberger. Weitere Feststellungen über die Gesetze des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes. S. 219.

Vorlesungsverzeichnis f. das Sommersemester 1922. S. 224.

Tagesereignisse. S. 224.

Personalien. S. 224.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über einige Grundfragen der kinetischen Wärmetheorie.

Von S. Boguslawski.

1. Einleitung. Eine der wesentlichsten Fragen, die eine kinetische Wärmetheorie zu beantworten hat, ist die nach der mechanischen Bedeutung der thermischen Begriffe, wie Temperatur, Entropie, thermodynamische Potentiale. Diese Frage hat bisher keine befriedigende Antwort erhalten. Der bedeutendste Erfolg ist bisher erreicht durch Boltzmanns Zurückführung des Entropiebegriffs auf den Begriff der Wahrscheinlichkeit eines Zustandes. Allein, dies kann nicht als endgültige Lösung des Problems aufgefaßt werden. Denn, erstens ist der Begriff der Wahrscheinlichkeit kein mechanischer Begriff. Zweitens aber ist eine einwandfreie Ermittlung der Wahrscheinlichkeit eines Zustandes durch apriorische Betrachtungen nur für wenige einfachste Probleme möglich. Am besten wird dies dadurch bewiesen, daß Einsteins Umkehrung des Boltzmannschen Prinzips zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit aus der Entropie sehr fruchtbar gewesen ist.

Die vorliegende Arbeit ist im wesentlichen ein Auszug aus einer größeren vor 4 Jahren in russischer Sprache abgefaßten Abhandlung, die aber wegen ungünstiger äußerer Umstände erst im Drucke ist. Die hier angestrebte Zurückführung der thermodynamischen Prinzipe auf das Prinzip der kleinsten Wirkung ist eigentlich eine Rückkehr zu älteren, zum Teil später verlassenen, Gedanken von Boltzmann, Clausius, J. J. Thomson[1]). Nur werden hier dieselben Gedanken von neuer Seite her und mit Rücksicht auf neuere Probleme wieder aufgenommen. Der Grund, warum seinerzeit Boltzmann sich gezwungen fühlte, diesen Gedankenkreis zu verlassen, und zu Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen überzugehen, war wohl der, daß er auf diesem Wege die Unmöglichkeit sah, die mittlere kinetische Energie der Molekularbewegung ganz allgemein als Temperaturmaß zu betrachten. Er traute nicht genug diesen seinen Deduktionen, die damals durch die Erfahrung nicht gestützt wurden, um daraus die folgerichtigen Schlüsse zu ziehen. Es bedurfte neuer Erfahrungen, nämlich der Entdeckung der Quantenerscheinungen, um unseren Glauben an die Proportionalität zwischen mittlerer kinetischer Energie und der Temperatur zu vernichten. Erst dann wurde der Forschung freie Bahn gelassen. Von der Lösung des Problems fühlen wir uns aber jetzt viel weiter entfernt, als zu Boltzmanns Zeiten.

2. Innere und äußere Zustandsvariable. Es seien $q_1, \ldots q_n$ die allgemeinen Koordinaten, durch die die Konfiguration des molekularen Systems festgelegt wird; $p_1, \ldots p_n$ — die zugehörigen Impulse; L — die Lagrangesche Funktion. Die Bewegungsgleichungen sind

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \ldots n,$$

wo Q_i die äußere Kraft ist. Kann Q_i von Null verschieden sein, so nennen wir das entsprechende q_i eine äußere Zustandsvariable, eine innere dagegen, falls Q_i stets gleich Null ist. Ob eine bestimmte Koordinate q_i als innere oder äußere anzusehen ist, hängt in letzter Instanz von unserer Experimentierkunst ab. Sind zum Beispiel Atome elektrisch geladen, so nennen wir die Variable

$$q = \Sigma e_i x_i$$

---

1) Die hierher gehörende Literatur ist im wesentlichen folgende: L. Boltzmann, Wien. Ber. **53**, 105, 1866. Wissenschaftliche Abhandlungen I, 9. R. Clausius, Pogg. Ann. **142**, 433. 1871; **146**, 585. 1872. Loschmidt, Wien. Ber. **59**, II, 395, 1869. C. Szily, Pogg. Ann. 115, 205, 1872; **149**, 74, 1873; Ergbd. **7**, 74. 1876; **160**, 435. 1878. W. Michelson, Abhandlungen der Moskauer Math. Ges. (russisch) **13**, 1886. J. J. Thomson, Applications of dynamics to physics and chemistry, London 1888. P. Ehrenfest, Verh. d. D. Phys. G. **15**, 453. 1913. Proceed. Amsterdam, **16**, 591, 1914, Ann. d. Phys. **51**, 327. 1916, sowie neuere Arbeiten verschiedener Autoren über adiabatische Invarianten.

eine äußere, weil wir über elektrische Felder verfügen, durch die wir auf diese Koordinate einwirken können. Sonst hätten wir sie als innere angesprochen.

Für die äußeren Variablen werden wir weiterhin die Bezeichnungen $a_1, \ldots a_k$ gebrauchen. Sind die zu den a_i gehörenden Impulse dauernd gleich Null, so nennen wir den Zustand einen statischen. Wir beschränken uns im folgenden auf statische Zustände.

3. Die Minimalprinzipe der Mechanik und Thermodynamik. Sowohl die mechanischen wie die thermodynamischen Gesetze lassen sich aus Minimalprinzipen ableiten. Ist eine rein mechanische Begründung der Thermodynamik möglich, so müssen die Prinzipe beider Disziplinen, wenn passend formuliert und vielleicht verallgemeinert, identisch sein. Wir wollen gleich zeigen, daß in der Tat eine weitgehende Analogie hier vorhanden ist.

Es sei U die potentielle, T — die kinetische, $\varepsilon = T + U$ die vollständige Energie des Systems. Ferner ϑ die Temperatur, η die Entropie, ψ die freie Energie desselben.

Die klassische Mechanik wird auf dem Hamiltonschen Prinzipe

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T)\, dt = 0 \qquad (A)$$

aufgebaut, wobei als fest vorgegeben zu betrachten sind: die Anfangs- und Endkonfiguration des Systems und auch das Zeitintervall $t_2 - t_1$, welches das System gebraucht, um aus der ersteren in die letzteren zu gelangen.

Die Form (A) des Prinzips der kleinsten Wirkung ist nicht die einzig mögliche. Eine andere Form, die den Namen Maupertuis' trägt, ist

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} 2\, T\, dt = 0\,. \qquad (B)$$

Hier aber muß an Stelle des Zeitintervalls $t_2 - t_1$, die Gesamtenergie ε fest vorgegeben sein.

Die thermodynamischen Gesetze andererseits lassen sich aus dem Prinzipe

$$\delta \psi = 0 \qquad (A')$$

folgern, wobei als fest vorgegeben zu betrachten sind: die Werte der äußeren Konfigurationsparameter a_i und die Temperatur ϑ.

Dem Prinzip (A') stellen wir das Prinzip

$$\delta \eta = 0 \qquad (B')$$

an die Seite, wobei an Stelle der Bedingung der Konstanz der Temperatur diejenige der Konstanz der Gesamtenergie zu setzen ist.

Es besteht eine Analogie zwischen den Prinzipen (A) und (A') einerseits, (B) und (B') andererseits. Wir wollen an das erste Prinzipenpaar anknüpfen.

4. Mechanische Funktionen, die den thermodynamischen analog sind. Es sei ein mechanisches System gegeben, dessen innere Koordinaten $q_1, \ldots q_n$, die äußeren $a_1, \ldots a_k$ sind. Wir setzen voraus, daß die Bewegung dieses Systems bei allen Werten der Integrationskonstanten und der äußeren Parameter periodisch mit der Periode τ verläuft (welche natürlich von den Integrationskonstanten und den Parametern abhängen wird). Dies ist eine sehr wesentliche Einschränkung, die wir unseren Betrachtungen auferlegen.

Wir betrachten die Funktion

$$\psi' = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} (U - T)\, dt\,. \qquad (1)$$

Das Prinzip

$$\delta \psi' = 0 \qquad (A'')$$

leistet nun offenbar in mechanischer Hinsicht genau dasselbe, wie das Prinzip (A).

Setzen wir nun voraus, daß die Bewegungsgleichungen erfüllt sind und die Integration in (1) für einen gegebenen Bewegungszustand ausgeführt ist, so wird ψ' zunächst als Argumente sämtliche Integrationskonstanten $\alpha_1, \ldots \alpha_{2n}$ nebst den Parametern $a_1, \ldots a_k$ enthalten können.

Wir wollen gleich zeigen, daß diese Funktion alle formale Eigenschaften der freien Energie besitzt. Akzente bei ψ, sowie weiter unten bei ϑ und η führen wir mit, um daran zu erinnern, daß wir bloß eine Analogie, nicht die Identität dieser Funktionen mit den entsprechenden thermischen behaupten wollen.

Wir haben vor allem zu zeigen, daß ψ' ebenso wie ψ bloß $k+1$ Argumente enthält und nicht $2n + k$, wie wir zunächst zulassen mußten. Wir gehen nun von dem gegebenen Bewegungszustande zu einem variierten über, indem wir den Konstanten und Parametern die Zuwächse $\Delta\alpha_1, \ldots \Delta\alpha_{2n}, \Delta a_1, \ldots \Delta a_k$ erteilen. Es zeigt sich, daß ψ' dann den Zuwachs erfährt

$$\Delta\psi' = \frac{\Delta\tau}{\tau^2} \int_0^{\tau} 2\, T\, dt + \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta a_i}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{\partial (U - T)}{\partial a_i}\, dt. \qquad (2)$$

Den Beweis dieser Formel, der sich ganz wesentlich auf die Periodizität der Ausgangs- sowie der variierten Bewegung stützt, wollen wir

der Kürze halber übergehen[1]). Wir sehen in der Tat, daß ψ' bloß $h+1$ Argumente a_i und τ enthält, wie wir es von der freien Energie fordern müssen. Weiter sehen wir, daß die Koeffizienten der Δa_i in (2) nichts anderes sind, als die äußeren Kräfte A_i, welche den zeitlichen Mittelwerten der inneren Kräfte $\frac{\partial(U-T)}{\partial a_i}$ entgegengesetzt gleich sein müssen, um diesen das Gleichgewicht zu halten. Beachten wir, daß nach der Definition der freien Energie

$$\Delta\psi = -\eta\Delta\vartheta + \sum A_i \Delta a_i,$$

so haben wir, um (2) auf dieselbe Form zu bringen, zu setzen

$$\frac{\sigma\Delta\tau}{\tau^2} = -\eta'\Delta\vartheta', \qquad (3)$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$\sigma = \int_0^\tau 2\,T\,dt. \qquad (4)$$

Aus

$$\psi' = \vartheta'\eta' \qquad (5)$$

und (1) folgt andererseits

$$\frac{\sigma}{\tau} = \vartheta'\eta'. \qquad (6)$$

Dividieren wir (5) durch (6) und integrieren, so folgt schließlich

$$\vartheta' = \frac{C}{\tau}, \qquad \eta' = \frac{\sigma}{C}, \qquad (7)$$

wo C eine Integrationskonstante ist. Analog der Temperatur ist somit der reziproke Wert der Periode. Der Entropie aber entspricht die Größe σ, welche tatsächlich nach Ehrenfest eine „adiabatische Invariante" ist.

Ein formaler Anschluß an die Formeln der Thermodynamik ist auf diese Weise vollständig erreicht.

Es sind offenbar ϑ' und η' nicht das, was wir gemeinhin unter Temperatur und Entropie verstehen. Wollten wir diese thermischen Begriffe durch (7) definieren, so würden wir schließen, daß ein Strahlungsgleichgewicht überhaupt nicht möglich ist, da die Temperatur jedes Oszillators oder jedes Freiheitsgrades eines Hohlraumes durch deren Frequenz ein für alle Male gegeben und unabhängig von deren Energie sein sollte. Und trotzdem sind diese Definitionen nicht so ohne weiteres zu verwerfen.

5. Physikalisches zur Rechtfertigung des Vorhergehenden. Wie lautet das Clausiussche Postulat, übersetzt in die Sprache der vorher angedeuteten Theorie? Es besagt offenbar: die Energie kann nicht von selbst von kleineren zu größeren Frequenzen übergehen. Das zweite Postulat der Wärmelehre fließt somit mit der Stokesschen Regel zusammen. Deshalb wäre es vielleicht möglich aus dieser Theorie in solchen atomtheoretischen Betrachtungen Nutzen zu ziehen, wo die klassische Thermodynamik vollständig versagt.

Sie kann aber auch durch ein strahlungstheoretisches Gedankenexperiment gestützt werden. Es sei Strahlungsenergie in einem zylindrischen Gefäß mit weißen Wänden enthalten. Die Länge des Zylinders sei l. Wir legen den Koordinatenanfang an ein Ende des Zylinders. Dicht am anderen (ebenfalls geschlossenen) Ende befinde sich ein Kolben von folgender idealer Beschaffenheit. Er soll die Strahlen des Spektralbezirks zwischen ν_1 und ν_2 vollständig reflektieren, alle übrigen Strahlen aber glatt durchlassen. Wir schieben den Kolben langsam ein. Die Strahlung des genannten Bezirks wird komprimiert. Der Druck auf den Kolben ist dabei dauernd einseitig, da in den Raum hinter ihm nur solche Strahlen gelangen, für die er einfach nicht existiert. Die komprimierte Strahlung aber ändert allmählich ihre Frequenz nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz. Sobald der Kolben in die Stellung

$$x_0 = \frac{l\nu_1^3}{\nu_2^3}, \qquad (\nu_2 > \nu_1)$$

angekommen ist, ist die ganze Strahlungsenergie des Intervalls aus diesem herausgeworfen. Jetzt könnten wir den Kolben ohne jede Arbeitsleistung hin- und herschieben, da reflektierte Strahlen nicht mehr da sind. Wir lassen aber den Kolben in der Stellung x_0 und fangen einen Kreisprozeß an. Wir bringen nämlich für einen Augenblick ein Planckscher Kohlenstäubchen in den Raum vor dem Kolben hinein. Das Strahlungsgleichgewicht wird hier wiederhergestellt, nicht aber hinter dem Kolben, so daß dieser wieder einen einseitigen Druck erfährt. Diesen benutzen wir, um Arbeit zu gewinnen, indem wir den Kolben langsam zurückgehen lassen. In dem Augenblick, wo er an das Ende l ankommt, ist nach dem Verschiebungsgesetz wieder die Strahlung des Intervalls $\nu_1 - \nu_2$ verschwunden. Wir schieben den Kolben ohne Arbeitsleistung in die Stellung x_0 zurück und fangen den Kreisprozeß von neuem an, d. h. stellen das Gleichgewicht auf einer Seite her, gewinnen eine endliche Arbeit und schieben den Kolben ohne Arbeitsleistung in die alte Stellung zurück. Durch wiederholte Anwendung des

1) Er findet sich in meiner Arbeit: „Zur Thermodynamik periodischer Bewegungen". Journ. d. russ. Phys.-Chem. Ges. **49**, 138, 1918.

Prozesses werden wir die ganze Strahlungsenergie in Arbeit umsetzen. Wir haben hiermit ein perpetuum mobile zweiter Art gedanklich konstruiert. Unsere Schlüsse sind dabei von der Form des Strahlungsgesetzes unabhängig.

Jede Strahlungsformel, nach der Temperatur aufgelöst, kann offenbar, als Definition des Temperaturbegriffs, als Funktion von Energie und Frequenz für Schwingungsvorgänge aufgefaßt werden. Wollten wir uns die Aufgabe stellen, eine solche Strahlungsformel, d. h. eine solche Temperaturdefinition zu finden, bei welcher die obige Schlußweise hinfällig wäre, so müßten wir annehmen, daß die Temperatur eine monoton wachsende Funktion der Frequenz allein und unabhängig von der Energie sei. Denn nur in diesem Falle würde das Planck'sche Kohlenstäubchen nicht imstande sein, Strahlungsenergie von niederen zu höheren Frequenzen zu transformieren, was zur Fortsetzung unseres Prozesses erforderlich ist.

Somit scheint unser Gedankenexperiment eine ähnliche Temperaturdefinition nahezulegen, zu der wir von ganz anderer Seite her gelangt waren[1]).

6. Andere thermodynamische Potentiale. Sind außer der Temperatur nicht die äußeren Parameter a_i, sondern die entsprechenden äußeren Kräfte A_i fest vorgegeben, so bestimmt sich der thermodynamische Gleichgewichtszustand nicht aus dem Minimum der freien Energie, sondern aus dem Minimum des „thermodynamischen Potentials" im engeren Sinne des Wortes. Eine dieser analogen mechanischen Funktion können wir auch ohne weiteres angeben.

Dazu müssen wir beachten, daß bei vorgegebenen äußeren Kräften zu der potentiellen Energie des Systems eine lineare Funktion dieser letzteren hinzukommt, so daß, falls wir die innere potentielle Energie des Systems mit U_i bezeichnen, zu setzen ist

$$U = U_i - \sum_{i=1}^{h} a_i A_i .$$

Dabei sind jetzt die a_i nicht mehr zeitlich konstant, sondern schwanken infolge der Wärmebewegung um gewisse Mittelwerte.

Setzen wir jetzt

$$\xi' = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (U - T)\, dt$$

und betrachten hier die A_i als Argumente, so hat diese Funktion die Eigenschaften des thermodynamischen Potentials.

Gehen wir ebenso wie in § 4 von einem Bewegungszustand zu einem benachbarten über, indem wir jetzt nicht die a_i, sondern die A_i zu variieren haben, so erhalten wir

$$\Delta\xi' = \frac{\sigma\,\Delta\tau}{\tau^2} - \sum_{i=1}^{h} \frac{\Delta A_i}{\tau}\int_0^\tau a_i\, dt ,$$

was mit der entsprechenden Formel der Thermodynamik in vollem Einklang ist, denn es folgt hieraus

$$\frac{\partial \xi'}{\partial A_i} = -\bar{a}_i ,$$

wo mit $\bar{a}_i$ der zeitliche Mittelwert von a_i bezeichnet wird.

Man sieht ohne weiteres, wie man auch anderen Potentialen entsprechende Funktionen zu bilden hat, falls man als unabhängige Variable zum Teil die Parameter a_i, zum Teil die Kräfte A_i betrachten will.

7. Das Entropieprinzip. Aus den Formeln von § 4 folgt weiter, daß als Erweiterung des Maupertuisschen Prinzips (B) und Analogie zum Prinzip des Entropiemaximums das Prinzip

$$\delta\eta' = 0$$

aufzufassen ist, welches, falls man die Konstante C in (7), deren Bedeutung unklar bleibt, einfach fortläßt, wird zu

$$\delta\sigma = 0 , \qquad (B'')$$

mit der Nebenbedingung $\varepsilon = \text{const}$.

Für die Änderung von σ, wenn man von einem Bewegungszustand zu einem variierten übergeht, folgt aus den Formeln von § 4:

$$\Delta\sigma = \tau\left(\Delta\varepsilon - \sum \frac{\Delta a_i}{\tau}\int_0^\tau \frac{\partial\,(U - T)}{\partial a_i}\, dt\right). \qquad (8)$$

Zu dem Prinzip (B'') gelangten wir auf dem Umweg über das Prinzip (A''). Dies liegt in der Natur der Sache: den Ausdruck (1) für die freie Energie kann man durch bloße Dimensionsbetrachtungen aus dem Hamiltonschen Prinzip mit einigem Rechte erschließen. Der Ausdruck für die Entropie kann auf gleiche Weise direkt aus dem Maupertuisschen Prinzip nicht gefolgert werden. Die Dimension der Entropie wird auch durch unsere Betrachtungen nicht festgelegt, da die Formeln (7) eine Konstante enthalten, deren Dimension unbestimmt ist.

8. Nichteindeutigkeit der vorhergehenden Deduktionen. Variiert man nur die Integrationskonstanten α_i, hält aber die Parameter a_i fest, so ist

1) Gedankenexperimente mit selektiv-durchlässigen Wänden finden sich in der Literatur bei W. Wien, Wied. Ann. **52**, 132, 1894; F. Reiche, Ann. d. Ph. **25**, 521, 1908; A. Joffé, Ann. d. Ph. **36**, 531, 1911.

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{\tau}, \tag{9}$$

wie z. B. aus (8) zu ersehen ist. Vergleichen wir diese wichtige Beziehung mit der entsprechenden thermodynamischen

$$\Delta\varepsilon = \vartheta\,\Delta\eta, \tag{10}$$

so kann aus (9) und (10) noch keineswegs gefolgert werden, daß $\eta = \sigma$, $\vartheta = \frac{1}{\tau}$ sein soll, sondern es folgt aus diesen Beziehungen nur, daß

$$\left.\begin{aligned} \eta &= H(\sigma), \\ \vartheta &= \frac{1}{\tau H'(\sigma)}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

wo mit H eine willkürliche Funktion von σ, mit H' deren Ableitung nach dem Argument bezeichnet wird.

Für die freie Energie wäre dann zu setzen

$$\psi = \varepsilon - \frac{H(\sigma)}{\tau H'(\sigma)}. \tag{12}$$

In eine solche erweiterte Definition der thermischen Begriffe fügen sich sowohl die klassischen gastheoretischen, wie die vorgeschlagenen strahlungstheoretischen zwanglos ein.

Setzt man

$$H(\sigma) = Nk\lg\sigma,$$

wo N die Anzahl Freiheitsgrade des Systems, k die Boltzmannsche Konstante bedeutet, so findet man

$$T = \frac{Nk\vartheta}{2}.$$

Setzt man dagegen

$$H(\sigma) = \frac{k}{h}\left[(\sigma + h)\lg(\sigma + h) - \sigma\lg\sigma\right]$$

und wendet die zweite der Formeln (11) auf Planckscke Resonatoren an, so bekommt man die Plancksche Formel als Beziehung zwischen der Energie und der Temperatur derselben. Bei $\sigma \gg h$ fällt man auf die Rayleighsche, oder gastheoretische Beziehung zurück, bei $\sigma \ll h$ auf das Wiensche Gesetz.

9. Die Tragweite der aufgestellten Prinzipe. Wir müssen uns überlegen, was unsere Prinzipe auszusagen vermögen, und worin sie über die klassischen Prinzipe der kleinsten Wirkung hinausgehen.

In genau derselben Weise, wie aus letzteren sind aus ihnen die Differentialgleichungen der Bewegung zu folgern.

Damit ist aber ihre Leistungsfähigkeit nicht erschöpft. Um dies einzusehen, brauchen wir sie nur in derselben Weise nutzbar zu machen suchen, wie die thermodynamischen Prinzipe verwertet werden. Die bisher betrachteten Bewegungszustände unseres Systems sind thermodynamischen Gleichgewichtszuständen analog. Um unsere Prinzipe zu verwerten, müssen wir zwei oder mehr solcher Systeme in gewisser Koppelung miteinander uns vorstellen und die Prinzipe auf das so entstehende Gesamtsystem anwenden. Nur muß die mechanische Koppelung unserer Systeme keine beliebige sein, sondern gewisse wesentliche Züge einer thermodynamischen Koppelung tragen. Von diesen wesentlichen Zügen müssen wir zwei in Betracht ziehen. Erstens soll eine thermische Berührung zwischen den Teilsystemen stattfinden. (Wir wollen uns auf den Fall zweier Systeme beschränken, was genügt, um die Verhältnisse klarzulegen.) Um die Berührung mechanisch zu charakterisieren, nehmen wir an, daß die Energie des ganzen Systems nicht gleich der Summe der Energien der Teilsysteme ist, sondern noch ein drittes Glied enthält, welches von den inneren Koordinaten und Geschwindigkeiten beider Systeme abhängen kann, so daß für die Gesamtenergie gilt

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_{12} + \varepsilon_2.$$

Nur soll das Zusatzglied ε_{12} stets nur klein gegenüber den beiden anderen sein. In der Tat wissen wir, daß bei der Berührung zweier Systeme längs einer Fläche die gegenseitige potentielle Energie der auf verschiedenen Seiten der Fläche befindlichen Atome stets nur klein ist gegenüber der gesamten potentiellen Energie der Atome.

Das Glied ε_{12} ist eine Art „Störungsfunktion". Es bewirkt, daß ε_1 und ε_2 nicht zeitlich konstant sind, wie sie bei völliger Trennung beider Systeme sein würden. Die Kleinheit dieser Störungsfunktion hat zur Folge, daß die zeitliche Veränderung von ε_1 und ε_2 nur langsam ist.

Die Erfahrung lehrt, daß bei der Berührung zweier Körper sich allmählich ein Gleichgewicht herstellt, nach dessen Erreichung der mittlere Energiestrom durch die Berührungsfläche gleich Null wird. Die Werte der Energien ε_1 und ε_2 und ebenso die von diesen abhängigen Größen σ_1, σ_2 und τ_1, τ_2 schwanken dann langsam um gewisse Mittelwerte. Mit Hilfe unserer Minimalprinzipe werden wir diese Mittelwerte ermitteln können.

Wir werden aber zweitens noch eine andere Art Koppelung zwischen beiden Systemen zulassen. Wir wollen nämlich annehmen, daß eine Anzahl äußerer Parameter a_i beiden Systemen gemeinsam sein sollen. Ein solcher Parameter ist z. B. die Stellung eines Kolbens, der zwei gasförmige Systeme innerhalb eines Zylinders voneinander trennt. Wir nehmen der

Einfachheit halber an, das erste System besitze für sich den einen äußeren Parameter a_1, das zweite den Parameter a_2, und außerdem sei der Parameter a beiden Systemen gemeinsam.

Aus dem oben Gesagten folgt, daß die Entropie für das zusammengesetzte System bis auf ein sehr kleines Korrektionsglied als Summe zweier auf die Einzelsysteme bezüglicher Teile sich darstellen läßt

$$\eta = \sum_{j=1,2} H(\sigma_j). \tag{13}$$

Das Variationsprinzip, durch welches der thermodynamische Gleichgewichtszustand bestimmt werden soll, lautet nun

$$\delta\eta = 0$$

mit den Nebenbedingungen

$$a_1 = \text{const.}, \qquad a_2 = \text{const.},$$
$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \text{const.}$$

Im Energieausdruck wird ebenfalls das kleine Glied fortgelassen.

Bezeichnen wir mit

$$\frac{A_1}{\vartheta}, \quad \frac{A_2}{\vartheta}, \quad -\frac{1}{\vartheta}$$

drei Lagrangesche Faktoren, so muß somit

$$\delta\sum H(\sigma_j) + \frac{1}{\vartheta}\sum A_j\delta a_j - \frac{1}{\vartheta}\sum\delta\varepsilon_j = 0 \tag{14}$$

sein. Durch Ausführung der Variation im ersten Gliede unter Berücksichtigung der aus (8) folgenden Werte der Ableitungen

$$\frac{\partial\sigma_j}{\partial\varepsilon} = \tau_j, \quad \frac{\partial\sigma_j}{\partial a_j} = -\int_0^{\tau_j}\frac{\partial(U - T_j)}{\partial a_j}\,dt,$$

$$\frac{\partial\sigma_j}{\partial a} = -\int_0^{\tau_j}\frac{\partial(U - T_j)}{\partial a}\,dt \tag{15}$$

ergibt sich

$$\sum\Big\{H'(\sigma_j)\tau_j - \frac{1}{\vartheta}\Big\}\delta\varepsilon_j -$$
$$-\sum\Big\{H'(\sigma_j)\int_0^{\tau_j}\frac{\partial(U - T_j)}{\partial a_j}\,dt - \frac{A_j}{\vartheta}\Big\}\delta a_j \tag{16}$$
$$-\sum H'(\sigma_j)\int_0^{\tau_j}\frac{\partial(U_j - T_j)}{\partial a}\,dt\,\delta a = 0.$$

Setzt man die Koeffizienten der fünf unabhängigen Variationen gleich Null, so erhält man die fünf Gleichgewichtsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} &H'(\sigma_j)\tau_j = \frac{1}{\vartheta}, \quad j = 1, 2,\\ &H'(\sigma_j)\int_0^{\tau_j}\frac{\partial(U_j - T_j)}{\partial a}\,dt = \frac{A_j}{\vartheta}, \quad j = 1, 2,\\ &\sum H'(\sigma_j)\int_0^{\tau_j}\frac{\partial(U_j - T_j)}{\partial a}\,dt = 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Das erste Gleichungspaar besagt, daß im thermodynamischen Gleichgewichtszustande

$$\frac{1}{H'(\sigma_1)\tau_1} = \frac{1}{H'(\sigma_2)\tau_2} = \vartheta \tag{18}$$

sein muß, wo ϑ die gemeinsame Temperatur beider Teilsysteme ist. Unter Benutzung dieser Gleichungen bringt man die übrigen drei auf die Form

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\tau_j}\int_0^{\tau_j}\frac{\partial(U - T_j)}{\partial a_j}\,dt = A_j, \quad j = 1, 2,\\ &\sum\frac{1}{\tau_j}\int_0^{\tau_j}\frac{\partial(U_j - T_j)}{\partial a}\,dt = 0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Von diesen bedeuten die beiden ersteren, daß A_j diejenigen Kräfte sind, die im Zeitmittel angelegt werden müssen, um die erforderte Konstanz der Parameter a_j zu erhalten. Die letzte aber besagt, daß die zeitlichen Mittelwerte der Kräfte, die von beiden Teilsystemen in Richtung des gemeinsamen Parameters a ausgeübt werden, einander entgegengesetzt gleich sind, so daß diese Kräfte sich im Mittel das Gleichgewicht halten. Mithin leistet unser Prinzip wirklich das, was wir von ihm forderten.

Hier sind einige Erläuterungen am Platze, durch welche die Stellung unserer Betrachtungsweise gegenüber der auf diesem schwierigsten Gebiete der modernen theoretischen Physik herrschenden Ideen deutlich machen sollen. Es werden von uns vor allem Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen gänzlich ausgeschaltet. Wie ist das nun möglich? Haben wir ein isoliertes thermodynamisches System, dessen Entropie im Wachsen begriffen ist, so wollen wir sagen, daß seine Molekularbewegungen von unstabileren zu stabileren Formen allmählich übergehen, wobei wir allerdings zunächst mit dem Worte „stabil" keinen wohl definierten Sinn verbinden können. Es ist wesentlich, wodurch wir die Bewegungsform definieren wollen. Betrachten wir unser gesamtes isoliertes thermisches System als ein einziges mechanisches System, so liegt es zunächst nahe, die Form der Molekularbewegungen durch die Werte der Integrationskonstanten zu charakterisieren. Von diesem

Standpunkt gäbe es aber kein Übergehen von unstabileren zu stabileren Formen, da die Integrationskonstanten und folglich auch die Bewegungsform zeitlich konstant sind. Nun ist aber eine solche Betrachtungsweise unzweckmäßig: sie trägt dem Wesen der thermischen Begriffe keine Rechnung. Wir müssen vielmehr unser System als aus Teilsystemen aufgebaut auffassen, wie wir es eben gemacht haben, und die Bewegungsform durch die Werte der Integrationskonstanten der isoliert gedachten Teilsysteme charakterisieren. Werden dann diese einer thermodynamischen Koppelung unterworfen, so wird die Bewegungsform wirklich zeitlich veränderlich. Dabei nähern sich, wie die thermodynamische Erfahrung lehrt, die Werte der Energiekonstanten ε gewissen ausgezeichneten Werten, um die sie nach Erreichung des Gleichgewichts schwanken. Diese ausgezeichneten Werte können wir als stabil bezeichnen. Was die übrigen Integrationskonstanten betrifft, so lehrt über deren Verhalten die Erfahrung nichts; für den speziellen Fall aber solcher Bewegungen, die bei allen Werten von Integrationskonstanten periodisch verlaufen, sind, wie wir gesehen haben, die Werte der übrigen Konstanten belanglos.

Unser Bestreben ist es, diese stabilen Bewegungsformen durch ein Minimalprinzip herauszusondern. Ein solches Prinzip besitzt die klassische Mechanik nicht. Auf dem Umwege über die Minimalprinzipe der Thermodynamik können wir aber mit großer Wahrscheinlichkeit schließen, daß so ein Prinzip existieren muß. Wie die Stabilität eines statischen Gleichgewichts nach zwei Methoden untersucht werden kann: einmal durch Untersuchung der kleinen Schwingungen des Systems in der Nähe des Gleichgewichts, andererseits aber durch Aufsuchen des Minimums der potentiellen Energie; ebenso sollte es möglich sein, die Stabilität eines Bewegungszustands auf zwei Weisen zu untersuchen: entweder durch Ermittlung der Schwankungen der Integrationskonstanten unter der Wirkung gegebener Störungsfunktionen, oder aber aus Minimumeigenschaften gewisser Funktionen dieser Integrationskonstanten.

Daß die Form des Prinzips, zu der wir gelangten, nicht ungeeignet ist, um stabile Bewegungen herauszusondern, mag durch folgendes Beispiel gezeigt werden. Wir betrachten eine kräftefreie Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt. Streng genommen paßt das Beispiel schlecht in den Rahmen unserer Theorie, weil die Bewegung hier im allgemeinen keine periodische ist. Es liegt aber nahe, hier an Stelle der Periode τ die Größe $\frac{2\pi}{\omega}$ einzuführen, wo ω die momentane Winkelgeschwindigkeit bedeutet. Da in diesem Falle $\varepsilon = T$ ist, so haben wir

$$\sigma = \int_0^{2\pi/\omega} 2T\,dt = \frac{4\pi\varepsilon}{\omega}.$$

Durch das Prinzip

$$\delta\sigma = 0$$

mit der Nebenbedingung $\varepsilon = \text{const.}$ werden hier Bewegungen herausgesondert, die bei vorgegebener Energie die größte oder kleinste Winkelgeschwindigkeit aufweisen, d. h. die Rotationen um die Acnsen des kleinsten und größten Trägheitsmoments. Dies sind tatsächlich die stabilen Rotationen.

Bei Stabilitätsuntersuchungen an Himmelskörpern sind übrigens schon längst Minimalprinzipe angewandt worden, welche unseren Prinzipen verwandt sind[1]).

Für den Fall eines Freiheitsgrads ist

$$\sigma = \int_0^{\tau} 2T\,dt = \oint p\,dq$$

gleich dem Quantenintegral, dessen Wert über die quantentheoretische Zulässigkeit der Bewegungsform entscheidet. Nach der Quantentheorie sind diejenigen Formen stabil, für welche dieses Integral ein ganzzahliges Vielfaches des Planckschen Wirkungsquantums h ist. Für eine allgemeine periodische Bewegung ist

$$\sigma = \sum n_i \oint p_i\,dq_i,$$

wo n_i ganze Zahlen sind. Es könnte deshalb unsere Betrachtungsweise für die Quantentheorie fruchtbar werden. Dies sind offenbar dieselben Zusammenhänge, die in Ehrenfests Theorie der „adiabatischen Invarianten" zur Geltung kommen.

Es wäre der Schluß äußerst verlockend, daß die quantentheoretisch zulässigen Bewegungen nichts anderes, als die im gewöhnlichen mechanischen Sinne stabilen sind, und daß ein Wachsen der Entropie andererseits ein Übergehen der Bewegung von „ungequantelten" zu „gequantelten" Formen, von unstabileren zu stabileren. Daß dieser Schluß falsch ist, kann man gewiß nicht beweisen. Ihn aber zu begründen ist allerdings eine Aufgabe, von deren Lösung wir sehr weit entfernt sind.

10. Atomtheoretische Anwendungen. Wir wissen jetzt, daß Atome mechanische

1) Man vergleiche z. B. eine Arbeit von Liapounoff, welche 1884 in russischer Sprache, 1904 in französischer in Annales de la faculté des Sciences de l'Université de Toulouse erschienen ist.

Systeme von mäßiger Anzahl Freiheitsgrade sind. Gleichzeitig ist aber jedes Atom auch ein thermodynamisches System. Es besitzt ein bestimmtes thermodynamisches Potential, welches als Maß seiner Stabilität dienen soll. Haben wir etwa ein einatomiges Gas vor uns, so wird sein thermodynamisches Potential pro Atom sowohl von dem spezifischen Volumen und der Temperatur des Gases, wie auch von der augenblicklichen Anordnung der Elektronen im Atom abhängen. Man kann sich aber auf den Standpunkt stellen, daß Volumen und Temperatur nur dadurch auf den Wert des Potentials Einfluß haben, daß durch sie die Bedingungen für die innere Stabilität des Atoms verändert werden. Es ist doch jetzt wahrscheinlich, daß das Vorkommen bestimmter Elektronenbahnen vom Volumen und Temperatur nicht unabhängig ist. Wenn dem so ist, so entsteht die Aufgabe, das thermodynamische Potential eines mechanischen Systems von mäßiger Anzahl Freiheitsgrade zu ermitteln. Dies ist gerade ein Ziel, welches nur durch Betrachtungen, welche oben mitgeteilt wurden, erreicht werden kann.

Man findet manchmal in der Literatur Versuche, die stabilen Anordnungen von Elektronen im Atom aus dem Minimum der potentiellen Energie zu erschließen, und zwar ohne irgendwelche Nebenbedingungen dabei zu berücksichtigen. Das wäre richtig für ein statisches Atommodell, ist aber gewiß verkehrt für ein dynamisches Modell wie das Bohrsche. Dies ist der alte Fehler Berthelots, der, aus der Chemie verbannt, die Tendenz hat, in die „Ultrachemie", die Atomtheorie einzudringen. Es müssen hier andere, dynamische Stabilitätskriterien aufgestellt werden, die dann wohl mit den thermodynamischen zusammenfallen würden. Man kann bekanntlich auch thermodynamische Gleichgewichtszustände durch die Forderung des Minimums der Energie bestimmen, falls man dabei dem System die Nebenbedingung der Konstanz der Entropie auferlegt. Nach dem oben Gesagten scheint aber die Entropie sich irgendwie durch Quantenintegrale auszudrücken. Es ist also möglich, daß das Energieminimum mit quantentheoretischen Nebenbedingungen zu den richtigen stabilen Anordnungen führt. Bohr selbst, durch seine tiefe Intuition geleitet, scheint in seinen Stabilitätsbetrachtungen durchaus auf richtigem Wege zu stehen, obgleich er sich dabei scheinbar nicht durch thermodynamische Analogien leiten ließ.

Von unserem Standpunkte fällt also das Grundproblem der Atomtheorie mit dem Grundproblem der Chemie — der Auffindung der Potentialen von Atomen — zusammen. Chemische Erfahrungstatsachen, wie z. B. der Nernstsche Wärmesatz, würden dann beim Aufsuchen dieser Funktionen zu berücksichtigen sein.

Eine Lösung des Problems erwarten wir vom Prinzip der kleinsten Wirkung. Dieses oberste Prinzip der theoretischen Physik sollte uns eine Synthese unserer Kenntnisse auf Atom- und quantentheoretischem, chemischem, thermodynamischem und rein mechanischem Gebiete erlauben.

11. Einige Folgen des Virialsatzes. Im Hinblick auf weitere Anwendungen wollen wir hier einige Betrachtungen einschalten, die in keinem direkten Zusammenhang mit dem Vorhergehenden stehen.

Es sei ein mechanisches System so beschaffen, daß sowohl seine Koordinaten q_i, wie die Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ stets endlich bleiben. Dann gilt für dieses System der Virialsatz. Wir nehmen ferner an, daß das System keinen äußeren Kräften ausgesetzt ist, seine inneren Kräfte aber ein Potential besitzen, welches eine homogene Funktion l-ten Grades der Koordinaten q_i ist. Dann folgert man leicht aus dem Virialsatz und der Eulerschen Gleichung für homogene Funktionen, daß zwischen den zeitlichen Mittelwerten der kinetischen und potentiellen Energie $\overline{T}$ und $\overline{U}$ einerseits und der Gesamtenergie ε andererseits die Beziehungen bestehen

$$\frac{2+l}{l}\,\overline{T} = \frac{2+l}{2}\,\overline{U} = \varepsilon\,. \tag{20}$$

Für die Keplersche Ellipsenbewegung, wo $l = -1$ ist, ergibt dies die bekannten Beziehungen

$$-\overline{T} = \frac{1}{2}\,\overline{U} = \varepsilon\,. \tag{21}$$

Es gelten aber diese Beziehungen keineswegs nur für die Bewegung eines einzelnen Elektrons, sondern auch für ein noch so kompliziert gebautes Atom oder Molekül unter der Voraussetzung, daß die Wechselwirkungen zwischen Kernen und Elektronen nach dem Coulombschen Gesetz erfolgen. Sind nämlich e_i, x_i, y_i, z_i die Ladungen und Koordinaten der Kerne und Elektronen, so ist die gesamte potentielle Energie des Systems

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,\,j \\ i \neq j}} \frac{e_i e}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}},$$

eine homogene Funktion (-1)-ten Grades der Koordinaten. Der Virialsatz gilt für dieses System, falls es stabil ist und sein Schwerpunkt ruht.

Für das Wasserstoffatom kann aus (21) eine interessante Beziehung zwischen der emittierten

Schwingungszahl und den Umlaufszahlen des Elektrons auf der Anfangs- und Endbahn gefolgert werden. Die Bohrsche Frequenzbedingung (zweite Quantenbedingung)

$$h\nu = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

kann infolge von (21) auch geschrieben werden

$$h\nu = \overline{T}_2 - \overline{T}_1 . \qquad (22)$$

Sind nun ν_1, ν_2 die Umlaufszahlen auf der Anfangs- und Endbahn, so ist

$$\overline{T}_1 = \nu_1 \int_0^{1/\nu_1} T\,dt , \qquad \overline{T}_2 = \nu_2 \int_0^{1/\nu_2} T\,dt . \qquad (23)$$

Die erste Quantenbedingung gibt aber

$$\int_0^{1/\nu_1} 2\,T\,dt = n_1 h , \qquad \int_0^{1/\nu_2} 2\,T\,dt = n_2 h , \qquad (24)$$

wo n_1 und n_2 ganze Zahlen (Summen der Quantenzahlen) sind. Setzt man (23) und (24) in (22) ein, so hebt sich h fort und es entsteht die Beziehung

$$2\nu = n_2\nu_2 - n_1\nu_1 . \qquad (25)$$

Es besteht also eine einfache rationale Beziehung zwischen der emittierten Schwingungszahl und den Umlaufszahlen ν_1 und ν_2. In Worten ausgedrückt lautet sie: die halbe Schwingungszahl ist gleich der Differenz des n_2-ten „Obertons" der Endumlaufszahl und des n_1-ten „Obertons" der Anfangsumlaufzahl. Für das Wasserstoffmodell ersetzt (25) die Bohrsche Frequenzbedingung vollständig. Wäre es möglich, diese Beziehung irgendwie direkt zu begründen, so würde eine zweimalige Heranziehung der Quantenhypothese in zwei verschiedenen Formen, welche an sich so unbefriedigend ist, für die Theorie der Spektra nicht mehr nötig. Allein muß man bemerken, daß (25) nur für Coulombsche Felder gilt, während die zweite Quantenbedingung einen viel weiteren Anwendungsbereich zu haben scheint.

Die Beziehungen (20) können oft mit Vorteil benutzt werden. Für elastische Schwingungen folgt aus ihnen bekanntlich, daß die mittlere kinetische Energie gleich der mittleren potentiellen. Für einen schweren Ball, der in einem homogenen Schwerkraftfelde auf einem elastischen Boden springt, ergibt sich mit $l = 1$

$$3\,\overline{T} = \frac{3}{2}\,\overline{U} = \varepsilon ,$$

wobei die potentielle Energie vom Boden an gerechnet wird.

Will man sich des Virialsatzes bedienen, so ist es nützlich zu wissen, wie das Kraftgesetz beschaffen sein muß, damit die Koordinaten und Geschwindigkeiten stets endlich bleiben. Für die Bewegung eines Massenpunkts unter Wirkung einer Zentralkraft, welche einer Potenz der Entfernung vom Zentrum proportional ist, läßt sich die Frage leicht beantworten. Ist die potentielle Energie

$$U = a_r l$$

und ist ε die Gesamtenergie, so gelten zwei Bedingungen: 1. müssen a, l, ε dasselbe Vorzeichen haben, 2. muß $l > -2$ sein.

12. Besondere Eigenschaften der periodischen Bewegungen. Die Klasse der Bewegungen, auf deren Betrachtung wir uns oben beschränkt haben, ist durch gewisse wichtige Besonderheiten ausgezeichnet. Halten wir nämlich die äußeren Parameter a_i konstant und gehen von einem gegebenen Bewegungszustand zu einem benachbarten über, der aus dem ersteren dadurch entsteht, daß sämtlichen Integrationskonstanten α_i (deren eine die Energie ε bedeutet) kleine Zuwächse $\Delta\alpha_i$ erteilt werden, so ist nach (8)

$$\Delta\sigma = \tau\,\Delta\varepsilon . \qquad (26)$$

Es ist somit σ nur von der Energie abhängig, nicht aber von den übrigen Konstanten. Es folgt weiter aus (26)

$$\tau = \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} . \qquad (27)$$

(Wir schreiben die partielle Ableitung, weil σ außer ε noch die Argumente a_i enthält.) Es ergibt sich der Satz: ist die Bewegung so beschaffen, daß sie bei Variation sämtlicher Integrationskonstanten stets periodisch bleibt, so hängt ihre Periode nur von der Energie ab. Durch die Keplersche Ellipsenbewegung wird dieser Satz gut illustriert.

Es kann auch umgekehrt ε als Funktion von σ aufgefaßt werden. Nun ist für das Elektron des Wasserstoffatoms

$$\sigma = nh ,$$

wo n die Summe der Quantenzahlen bedeutet. Die Energie hängt also nur von der Summe der Quantenzahlen, nicht von den einzelnen Quantenzahlen ab. Dadurch wird die Anzahl möglicher Spektrallinien herabgesetzt. Die Tatsache also, daß die Quantentheorie für das Wasserstoffspektrum keine größere Mannigfaltigkeit von Spektrallinien ergibt, als die Balmersche, hängt aufs engste mit der Periodizität der Keplerbewegung zusammen. Das relativistische Elektron, dessen Bewegung im allgemeinen nicht periodisch ist, ergibt eine größere Mannigfaltigkeit — die Sommerfeldsche Feinstruktur.

Für den Fall, daß die potentielle Energie eine homogene Funktion der Koordinaten ist,

kann man leicht die Art der Abhängigkeit von σ und τ von ε ermitteln. Da nämlich

$$\frac{\sigma}{\tau} = 2\,\overline{T},$$

so folgt aus (27)

$$\frac{\partial \lg \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2\,l}.$$

Ist aber U homogen vom Grade l, so kann nach (20) dafür geschrieben werden

$$\frac{\partial \lg \sigma}{\partial \varepsilon} = \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\varepsilon}$$

und hieraus durch Integration

$$\sigma = C\,\varepsilon^{1/l - 1/2}.$$

Für die Periode folgt durch Differentiation

$$\tau = C\,(1/l + 1/2)\,\varepsilon^{1/l - 1/2}.$$

Für die Keplerbewegung ist σ der $(-1/2)$-ten, τ der $(-3/2)$-ten Potenz der Energie proportional. Für die quasielastische Bewegung sind die entsprechenden Potenzen die erste und nullte.

13. Zur Begründung der statistischen Mechanik. Die statistische Mechanik ersetzt das schwierigere Problem der Berechnung von Zeitmittelwerten durch ein leichteres — der Bildung von gewissen „statistischen" Mittelwerten. Ein strenger Beweis der Äquivalenz dieser beiden Arten von Mittelwertsbildung steht bisher aus. Wir wollen zeigen, daß unsere Betrachtungsweise auch auf diese Frage einiges Licht wirft.

Wir ordnen in üblicher Weise dem augenblicklichen Zustand unseres Systems einen Punkt im $2n$-dimensionalen Phasenraume zu, dessen rechtwinklige Koordinaten die Variablen q_i und die zugehörigen Impulse p_i sind. Das Zeitmittel einer Funktion f der q_i und p_i im Intervall zwischen t_1 und t_2 ist

$$\overline{f} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(q,p)\,dt. \tag{28}$$

Dieses Zeitmittel wollen wir rein formal durch ein Mittel über das Volumen einer Röhre von infinitesimalem Querschnitt in unserem Phasenraume ersetzen. Dazu können wir etwa in folgender Weise verfahren. Wir schreiben die Integrale des kanonischen Gleichungssystems in der Form

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(q,p) &= \alpha_1, & \psi_1(q,p) &= \beta_1 + t,\\ \varphi_2(q,p) &= \alpha_2, & \psi_2(q,p) &= \beta_2,\\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\ \varphi_n(q,p) &= \alpha_n, & \psi_n(q,p) &= \beta_n. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Dabei soll

$$\partial(\varphi_1, \cdots \varphi_n,\ \psi_1, \cdots \psi_n) = 1 \tag{30}$$

$$\partial(q_1, \cdots q_n,\ p_1, \cdots p_n)$$

sein. Die Funktion φ_1 sei dabei die Hamiltonsche Funktion, die Konstante α_1 der Wert der Energie. Der Bildpunkt bewegt sich längs der Schnittkurve der Hyperflächen

$$\varphi_i = \alpha_i, \qquad i = 1, 2, \cdots n,$$
$$\psi_i = \beta_i, \qquad i = 2, 3, \cdots n.$$

Seine augenblickliche Lage wird durch die Gleichung

$$\psi_1 = \beta_1 + t \tag{31}$$

festgelegt.

Wir führen für einen Augenblick die φ_i, ψ_i als neue Variable an Stelle der q_i, p_i ein. Aus (31) folgt

$$d\psi_1 = dt,$$

so daß (28) geschrieben werden kann.

$$\overline{f} = \frac{\int_{\beta_1}^{\beta_1 + t_2 - t_1} F(\varphi, \psi)\,d\psi_1}{\int_{\beta_1}^{\beta_1 + t_2 - t_1} d\psi_1},$$

wo $F(\psi, \varphi)$ das Resultat der Substitution der φ_i, ψ_i an Stelle der q_i, p_i in $f(q,p)$ bedeutet. Multiplizieren wir noch oben und unten mit dem Differentialenprodukt

$$d\alpha_1\, d\alpha_2 \cdots d\alpha_n\, d\beta_2 \cdots d\beta_n,$$

so kann das Resultat geschrieben werden

$$\overline{f} = \frac{\int\cdots\int F(\varphi,\psi)\,d\varphi\,d\psi}{\int\cdots\int d\varphi\,d\psi}, \tag{32}$$

wobei zu integrieren ist

$$\left.\begin{aligned} &\text{über } \varphi_1 \text{ von } \alpha_1 \text{ bis } \alpha_1 + d\alpha_1,\\ &\quad\ \varphi_2 \quad\ \alpha_2 \quad\ \alpha_2 + d\alpha_2,\\ &\quad\cdots\cdots\\ &\quad\ \varphi_n \quad\ \alpha_n \quad\ \alpha_n + d\alpha_n,\\ &\quad\ \psi_1 \quad\ \beta_1 + t_1 \quad\ \beta_1 + t_2,\\ &\quad\ \psi_2 \quad\ \beta_2 \quad\ \beta_2 + d\beta_2,\\ &\quad\cdots\cdots\\ &\quad\ \psi_n \quad\ \beta_n \quad\ \beta_n + d\beta_n. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Multiplizieren wir noch (32) im Zähler und Nenner mit einer konstanten Zahl D und gehen unter Berücksichtigung von (30) zu den alten Variablen zurück, so wird aus (32)

$$\overline{f} = \frac{\int\cdots\int f(q,p)\,D\,dq\,dp}{\int\cdots\int D\,dq\,dp}, \tag{34}$$

wobei die Integrationen über die Röhre (33) zu erstrecken sind. Betrachten wir D als eine konstante Dichte, mit welcher die Bildpunkte unsere Röhre erfüllen, so ist die angekündigte Verwandlung des Zeitmittels in ein statistisches Mittel über das Volumen der Röhre vollzogen. Diese Verwandlung ist aber rein formal und bringt zunächst nichts sachlich Neues mit sich. Das Neue kommt erst hinzu, wenn wir jetzt unsere obige Betrachtungsweise heranziehen. Da wir uns auf periodische Bewegungen beschränkt haben, so wollen wir $t_2 - t_1$ gleich der Periode setzen. In diesem Falle werden die Hyperflächen

$$\psi_1 = \beta_1 + t_1 \quad \text{und} \quad \psi_1 = \beta_1 + t_2$$

zusammenfallen und bei der Abgrenzung des Röhrenvolumens keine Rolle spielen. Die Röhre wird eine geschlossene, gebildet durch die übrigen $2(n-1)$ Hyperflächen (33). Es sind nun nach (8)

$$\sigma, \quad \tau\left(=\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}\right), \quad \int_0^\tau \frac{\partial(U-T)}{\partial a_i}\,dt\left(=-\frac{\partial\sigma}{\partial a_i}\right),$$

$$2\overline{T}\left(=\frac{\sigma}{\partial\sigma/\partial\varepsilon}\right), \quad \overline{A_i}\left(=-\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma}\frac{\partial a_i}{\partial\varepsilon}\right)$$

lauter Funktionen von ε und a_i allein, unabhängig von den übrigen Integrationskonstanten. Wissen wir aber von vornherein, daß $\overline{T}$, $\overline{A_i}$ von den $\alpha_2 \cdots \alpha_n$, $\beta_1 \cdots \beta_n$ unabhängig sind, so können wir in (34) anstatt über die Röhre über die ganze Schale des Phasenraums, welche durch die Hyperflächen

$$\psi_1 = \alpha_1 \quad \text{und} \quad \psi_1 = \alpha_1 + d\alpha_1$$

begrenzt wird, integrieren. Wir haben damit den Beweis erbracht, daß die Zeitmittel $\overline{T}$, $\overline{A_i}$ in aller Strenge als mikrokanonische Mittelwerte berechnet werden können. Wären uns nicht die a_i, sondern die entsprechenden Kräfte A_i fest vorgegeben, so hätten wir auf dieselbe Weise geschlossen, daß die $\overline{a_i}$ den entsprechenden mikrokanonischen Mittelwerten gleich sind.

Wir haben weder die Ergoden- oder Quasiergodenhypothese noch eine Hypothese über die „Vermischung" von statistischen Gesamtheiten herangezogen. Im Gegenteil haben wir vorausgesetzt, daß der Bildpunkt unseres Systems eine geschlossene Kurve auf der Hyperfläche $\psi_1 = \alpha_1$ beschreibt. Trotzdem konnten wir nachweisen, daß die beobachtbaren Zeitmittel den mikrokanonischen Mitteln gleich sind. Zugleich zeigt aber unser Verfahren deutlich, daß nicht jedes Zeitmittel auf diese Weise berechnet werden kann. Es kann so wohl das Zeitmittel der gesamten kinetischen Energie ermittelt werden, nicht aber des Anteils derselben, der auf irgendeinen Freiheitsgrad entfällt. Über den Gleichverteilungssatz gestattet unsere Betrachtungsweise nicht die geringste Aussage.

14. Nichtperiodische Bewegungen. Von den Bewegungen, die nicht periodisch verlaufen, sind wohl diejenigen am durchsichtigsten, für die sich die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung nach der Methode der Separation der Variabeln lösen läßt. Schwanken dabei im Laufe der Bewegung sämtliche Koordinaten, die keine „Winkelkoordinaten" sind, zwischen endlichen „Librationsgrenzen", so haben wir den Fall bedingt periodischer Bewegung, die nach der periodischen als die nächsteinfachste zu betrachten wäre. Wollten wir aber unsere Betrachtungsweise auf bedingt periodische Bewegungen ausdehnen, so würden wir sofort auf unüberwindliche prinzipielle Schwierigkeiten stoßen. Wie aus Ehrenfests und anderer Autoren Untersuchungen folgt, besitzt eine bedingt periodische Bewegung nicht bloß eine einzige adiabatische Invariante σ, wie die periodische, sondern es ist die Anzahl der adiabatischen Invarianten kleiner oder gleich der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems. Das System kann sozusagen eine größere Anzahl „Teilentropien" besitzen. Wie aus diesen Teilentropien die physikalische einzige Entropie aufzubauen ist, darüber läßt sich zurzeit nichts sagen. Daraus sieht man, daß unsere Beschränkung auf periodische Bewegungen, wie unbefriedigend sie an sich sein mag, durch das Wesen des Problems bedingt ist.

Moskau, Universität, 27. November 1921.

(Eingegangen 4. März 1922.)

Weitere Feststellungen über die Gesetze des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes.

Von C. Wieselsberger.

1. In einer früheren Arbeit[1]) wurde über Versuche berichtet, die sich im wesentlichen auf die Abhängigkeit der Widerstandszahl c von der Reynolds'schen Zahl R bezogen[2]). Diese Versuche wurden mit Zylindern von verschiedenen Durchmessern in ebener Strömung

1) Vgl. diese Zeitschr. **22**, 321—328, 1921.

2) Die Widerstandszahl c ist definiert durch $c = \frac{W}{\frac{\varrho v^2}{2} \cdot F}$ (W = Widerstand, ϱ = Luftdichte, v = Geschwindigkeit, F = Projektionsfläche des Körpers auf eine Ebene senkrecht zur Windrichtung), die Reynolds'sche Zahl ist $R = \frac{vd}{\nu}$ ($\nu = \frac{\mu}{\varrho}$, wobei μ = Zähigkeitsmaß und d eine Längenabmessung des Versuchskörpers bedeutet).

und in einem Bereich Reynolds'scher Zahlen von $R = 4{,}2$ bis $R = 800\,000$ ausgeführt. Aus diesen Messungen ergab sich eine ziemlich verwickelte Abhängigkeit der Widerstandszahl von der Reynolds'schen Zahl, die die Gültigkeit des quadratischen Widerstandsgesetzes für Zylinder in ebener Strömung ausschließt. Lediglich in einem Bereich, der zwischen $R = 15\,000$ und $R = 180\,000$ liegt, ist die Widerstandszahl nahezu konstant und daher das rein quadratische Widerstandsgesetz erfüllt. Die eigenartigen Erscheinungen, die beim Zylinder zutage traten, ließen es wünschenswert erscheinen, diese Versuche fortzusetzen und auf andere Körperformen auszudehnen. Über diese Versuche soll im folgenden berichtet werden. Zunächst wurde das Verhalten eines Zylinders von endlicher Länge in einem möglichst großen Bereich Reynolds'scher Zahlen festgestellt, sowie die Abhängigkeit der Widerstandszahl vom Verhältnis Zylinderdurchmesser zu Zylinderlänge (bei einer bestimmten Reynolds'schen Zahl) und weiterhin die Untersuchungen auf die Kugel und auf die senkrecht vom Luftstrom getroffene Scheibe ausgedehnt. Schließlich wurden noch einige Versuche über die Abhängigkeit der Widerstandszahl rechteckiger Platten, die senkrecht vom Winde getroffen werden, vom Seitenverhältnis der Platten ausgeführt, über deren Ergebnisse ebenfalls berichtet wird.

2. Zunächst wurde festgestellt, in welcher Weise sich die Widerstandszahl ändert, wenn man vom unendlichen langen Zylinder zu einem solchen von endlicher Länge übergeht, bei welchem also auch die beiden Stirnflächen umströmt werden. Untersucht wurden 6 Zylinder von 4 bis 300 mm Durchmesser; die Höhe der Zylinder war stets gleich dem fünffachen Durchmesser. Der Widerstand der dünneren Zylinder (bis einschließlich 13 mm Durchmesser) wurde nach der Pendelmethode durch Messung des Ausschlages unter Einwirkung des Luftstromes bestimmt. Bei den größeren Zylindern wurde hingegen der Widerstand an der normalen aerodynamischen Wage ermittelt. Die Versuche konnten hier leider nicht bis zu so kleinen Reynolds'schen Zahlen herab ausgedehnt werden, wie beim unendlich langen Zylinder. In letzterem Falle durchdrangen die aus Stahldrähten bestehenden Zylinder von oben kommend den Luftstrahl und waren neben ihrer Eigenschaft als Versuchsgegenstand auch gleichzeitig das Aufhängeorgan, so daß Nebenwiderstände der Aufhängevorrichtung nicht zu berücksichtigen waren. Bei den Zylindern geringen Durchmessers von endlicher Länge hingegen wird der Widerstand des Aufhängedrahtes sehr merklich. Man sieht, daß schließlich der Widerstand des Aufhängedrahtes erheblich größer wird als der Widerstand des Versuchsgegenstandes, da die Dünnheit des Aufhängedrahtes eine gewisse Grenze hat. Der Widerstand des Zylinders erscheint dann als Differenz zweier nahezu gleich großer Zahlen, so daß die Meßgenauigkeit schließlich unzureichend wird. Der kleinste, mit noch ausreichender Genauigkeit meßbare Zylinder hatte 4 mm Durchmesser und 20 mm Länge. Die Luftgeschwindigkeit wurde zwischen 1,55 und 35,5 m/sec verändert. Die Versuche umfassen demnach einen Bereich Reynolds'scher Zahlen von $R \sim 400$ bis $R \sim 700\,000$. Die Ergebnisse sind in Fig. 1 in logarithmischer Darstellung veranschaulicht. Die Widerstandszahl c ist als Funktion der Reynolds'schen Zahl $R = \frac{vd}{\nu}$ aufgetragen. Des Vergleiches wegen ist auf dem gleichen Blatt die bereits in der ersten Mitteilung veröffentlichte Kurve für den unendlich langen Zylinder nochmals eingetragen. In dieser Abbildung sind ferner die Durchmesser der untersuchten Zylinder angegeben.

Der Verlauf der Kurve für den endlichen Zylinder ist in den Hauptzügen demjenigen für den unendlich langen Zylinder ähnlich. Verfolgt man die Kurve von den kleinsten Reynolds'schen Zahlen aufwärts, so zeigt sich zunächst die bereits vom unendlich langen Zylinder her bekannte Einsattlung, etwas nach links verschoben, und hieran anschließend ein längerer Bereich mit nahezu konstanter Widerstandszahl. Die kritische Reynolds'sche Zahl mit der sprunghaften Abnahme des spezifischen Widerstandes ist ungefähr an derselben Stelle. Der Hauptunterschied zwischen beiden Kurven liegt in dem niedrigeren Werte der Widerstandszahlen beim endlichen Zylinder. Dieser hängt offenbar damit zusammen, daß bei endlicher Zylinderlänge in das Wirbelgebiet unmittelbar hinter dem Zylinder von den Stirnflächen her Luft zuströmen kann, die die Druckverteilung um den Zylinder wesentlich verändert. Die Wirkung dieser seitlichen „Belüftung", die auch bei verschiedenen anderen Körperformen beobachtet wird, ist demnach, wie man sieht, von wesentlichem Einfluß auf den Widerstand. Die Einzelheiten dieses Vorganges bedürfen jedoch noch näherer Untersuchung. Nach Überschreitung der kritischen Reynolds'schen Zahl scheint sich der Unterschied in der Widerstandszahl mehr auszugleichen, doch lassen sich hier wegen der Begrenztheit des Meßbereiches nach oben hin sichere Feststellungen nicht machen. Jedenfalls aber zeigen diese Versuche, daß die Widerstandszahl eines

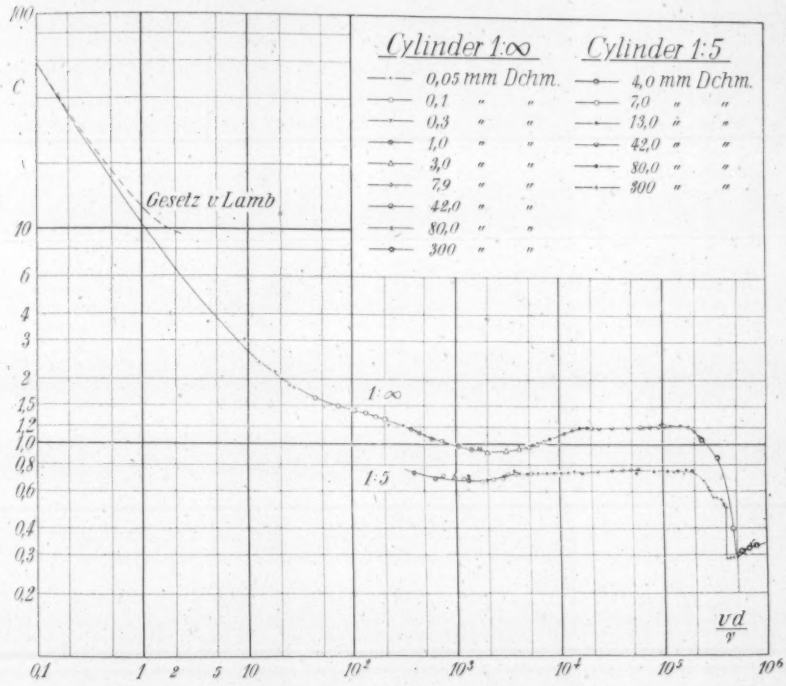


Fig. 1.

Zylinders, dessen Achse senkrecht vom Luftstrom getroffen wird, nicht nur in hohem Maße von der Reynolds'schen Zahl abhängt, sondern auch sehr wesentlich durch das Verhältnis Zylinderdurchmesser zu Zylinderlänge beeinflußt ist. Aus der Kenntnis der Widerstandszahl eines unendlich langen Zylinders läßt sich daher nicht ohne weiteres der Widerstand eines endlichen Zylinders ableiten.

Zur näheren Feststellung der Abhängigkeit der Widerstandszahl von dem Verhältnis Zylinderdurchmesser zu Zylinderlänge — wir bezeichnen dieses Verhältnis mit λ — wurde eine besondere Versuchsreihe mit 8 Zylindern ausgeführt. Diese Messungen fanden bei einer Reynolds'schen Zahl von rund $8 \cdot 10^4$ statt, da in deren Umgebung die Widerstandszahl nahezu konstant ist. In Fig. 2 ist die Widerstandszahl c abhängig von λ dargestellt und man sieht, daß die Widerstandszahl des unendlich langen Zylinders fast doppelt so groß ist wie jene eines Zylinders vom Verhältnis $\lambda = 1$. Ein ganz ähnliches Verhalten werden wir auch bei rechteckigen Platten von verschiedenem Seitenverhältnis, die senkrecht vom Winde getroffen werden, kennen lernen.

3. Die nächste Versuchsreihe erstreckte sich auf die Untersuchung des Widerstandsgesetzes von Kugeln. Auch hier konnten, aus dem gleichen Grunde wie beim endlichen Zylinder, keine so kleine Reynolds'sche Zahlen wie im Falle des Zylinders in ebener Strömung erreicht werden. Der Durchmesser der kleinsten Kugel betrug 8 mm, derjenige der größten 282,5 mm.

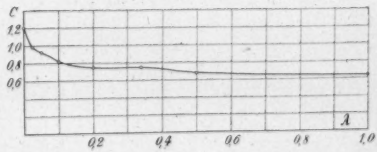


Fig. 2.

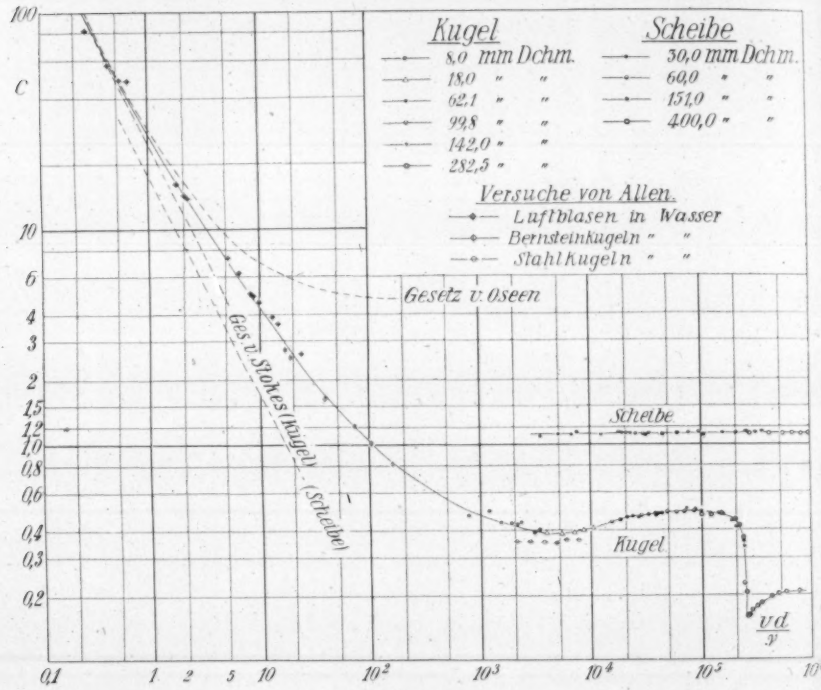


Fig. 3.

Der Bereich der auf den Durchmesser bezogenen Reynolds'schen Zahlen geht von $R = 790$ bis $R = 770\,000$. Die Ergebnisse der Messungen sind in Fig. 3 dargestellt, auf welcher auch die Durchmesser der untersuchten Kugeln angegeben sind. Die vier größeren Kugeln waren auf galvanoplastischem Wege hohl aus Kupfer hergestellt, die beiden kleineren waren massive Stahlkugeln. Alle Kugeln, mit Ausnahme der größten, wurden im kleinen Luftstrom der Versuchsanstalt (Strahldurchmesser = 1,2 m) gemessen; die größte Kugel wurde im 2,2 m Luftstrahl untersucht. Erwähnung verdient die Tatsache, daß auch bei den beiden größten Kugeln das Ähnlichkeitsgesetz sehr gut erfüllt ist, obwohl die Messungen in 2 verschiedenen Luftströmen stattfanden. Die Messungen nach der Pendelmethode wurden bei den 3 kleinsten Kugeln angewendet. Die kritische Reynolds'sche Zahl, die hier besonders scharf gekennzeichnet ist, liegt bei $R \sim 230000$. Der Bereich, in dem die Widerstandszahl konstant ist, ist hier noch weniger ausgedehnt als wie beim Zylinder. Auch nach Überschreitung der kritischen Reynolds'schen Zahl kann nicht mit Sicherheit die Gültigkeit des rein quadratischen Gesetzes erwartet werden. Bei der schleichenden Bewegung, d. h. bei sehr kleinen Reynolds'schen Zahlen, tritt die Wirkung der Trägheitskräfte der Flüssigkeit mehr und mehr gegenüber den Reibungskräften zurück. In der theoretischen Hydrodynamik ist es gelungen, für den Fall, daß die von der Trägheit herrührenden Glieder in der Differentialgleichung der Bewegung vollständig vernachlässigt werden, einen Ausdruck für den Widerstand anzugeben, den eine Kugel in einer mit Reibung behafteten Flüssigkeit erfährt. Dieses Gesetz wurde von Stokes angegeben[1]) und ist gültig für Reynolds'sche Zahlen, die klein sind gegen 1. Die von uns definierte Widerstandszahl drückt sich durch

1) H. Lamb, Hydrodynamik. Deutsche Übersetzung von Friedel. S. 685.

das Stokes'sche Gesetz in der einfachen Form aus:

$$c = \frac{24}{R}$$

unter R, die auf den Kugeldurchmesser bezogene Reynolds'sche Zahl verstanden. Der Gültigkeitsbereich der Stokes'schen Formel wurde später von Oseen erweitert, indem die Trägheitsglieder der Bewegungsgleichung bis zu einem gewissen Grade berücksichtigt wurden. (Auf analoge Weise ist dann auch der Widerstand des unendlich langen Zylinders von H. Lamb aufgestellt worden, wie in der ersten Mitteilung bereits erwähnt wurde.) Die Widerstandszahl nach dem Oseen'schen Gesetz, das für Reynolds'sche Zahlen bis etwa 1 gültig ist, drückt sich in folgender Weise aus:

$$c = \frac{24}{R}\left(1 + \frac{3}{16}R\right).$$

In Fig. 3 ist dieses Gesetz, sowie das von Stokes angegebene gestrichelt eingezeichnet. Die Darstellung wurde im Gebiete der kleinen Reynolds'schen Zahlen ferner durch Versuche ergänzt, die von H. S. Allen[1]) 1900 ausgeführt wurden. Allen hat den Widerstand aus der Steiggeschwindigkeit von sehr kleinen Luftbläschen (Durchmesser 0,05 bis 0,3 mm) in einer Flüssigkeit bzw. aus der Fallgeschwindigkeit von massiven Kugeln aus Bernstein und Stahl in Wasser ermittelt. Bei den Versuchen mit fallenden Stahlkugeln in Wasser waren die Reynolds'schen Zahlen so groß, daß sie in den von uns untersuchten Bereich hineinfallen. Wie man erkennt, liegen aber die 6 Meßpunkte dieser Reihe etwas niedriger als unsere Werte. Im übrigen ergibt sich aber ein zwangloser Übergang von unserer Kurve nach den beiden ersten Versuchsreihen von Allen und man sieht, daß die experimentell gefundene Kurve der Widerstandszahlen in den keilförmigen Zwischenraum hineinmündet, der durch das Stokes'sche und Oseen'sche Gesetz gebildet wird. Der Widerstand der Kugel ist damit von beliebig kleinen Reynolds'schen Zahlen bis zu $R = 770000$ bekannt.

4. Zur Bestimmung des Widerstandes von ebenen kreisförmigen Scheiben, deren Fläche senkrecht von der Strömung getroffen wird, wurde eine Versuchsreihe ausgeführt, die sich über einen Reynolds'schen Bereich $R = 3620$ bis $R = 962000$ erstreckt (R auf den Scheibendurchmesser bezogen. Das Verhältnis Scheibendicke zu Scheibendurchmesser war bei allen Scheiben annähernd $^1/_{100}$; die Scheibenränder waren kantig (nicht abgerundet). Die Ergebnisse, die ebenfalls auf dem Kurvenblatt Fig. 3 enthalten sind, zeigen, daß in dem untersuchten Bereich die Widerstandszahl ziemlich genau konstant ist mit einem Wert $c = 1{,}1$. Bei schleichender Bewegung ist auch für die Scheibe der Widerstand berechnet worden. Er ergibt sich, ebenso wie der Widerstand der Kugel, als Spezialfall aus dem Widerstand des Ellipsoides[1]). Für die Widerstandszahl der Scheibe erhält man:

$$c = \frac{17{,}4}{R}.$$

Dieses Gesetz ist in Fig. 3 gestrichelt eingezeichnet. Zwischen den Versuchswerten und dem theoretischen Gesetz liegt hier ein Gebiet, in dem der Verlauf der Kurve noch nicht festgestellt ist. Zur Untersuchung dieses Zwischengebietes wäre eine verfeinerte Meßmethode heranzuziehen. Mit der hier benützten Anordnung war es nicht möglich, den Widerstand bei Reynolds'schen Zahlen kleiner als 3600 genau genug zu messen. Eine kritische Reynolds'sche Zahl, wie wir sie beim Zylinder und bei der Kugel gefunden haben, ist hier nicht zu erwarten, da die Ablösungsstelle, die am Rande der Scheibe sitzt, keine Möglichkeit hat, sich zu verschieben. Man wird daher in diesem Falle bis zu hohen Reynolds'schen Zahlen mit konstanter Widerstandszahl rechnen dürfen. Nach den bisherigen Erfahrungen gilt dies allgemein für solche Körper, bei denen die Ablösung von einer Kante ausgeht, wie z. B. bei einem Prisma oder einem Würfel.

5. Bei Platten mit beliebiger Umrißform darf dem Vorstehenden gemäß die Gültigkeit des quadratischen Widerstandsgesetzes mit konstanten Koeffizienten angenommen werden. Hier ist aber die Umrißform der Platte von Einfluß auf den Wert der Widerstandszahl besonders dann, wenn der Umriß in einer Richtung sehr ausgedehnt ist. Dies geht deutlich aus einer Versuchsreihe hervor, die mit rechteckigen Platten von verschiedenem Seitenverhältnis ausgeführt worden ist. Das Seitenverhältnis λ variierte zwischen 1 und 0. Die Messung beim Seitenverhältnis $\lambda = 0$ (d. i. unendlich lange Platte) wurde zwischen ebenen Wänden ausgeführt, in gleicher Weise wie Messungen mit den unendlich langen Zylindern (vgl. die 1. Mitteilung, diese Zeitschr. 1921, S. 323). Die Widerstandszahl wurde bei vier verschiedenen Geschwindigkeiten (10, 15, 20 und 25 m/sec) bestimmt und daraus der Mittelwert

1) H. S. Allen, The motion of sphere in a viscous fluid. Phil. Mag. Ser. 5 Vol. 50, S. 323 u. ff.

1) H. Lamb, Hydrodynamik. Deutsche Übersetzung von Friedel S. 689.

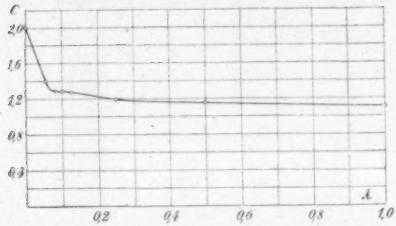


Fig. 4.

genommen. In Fig. 4 sind die Widerstandszahlen abhängig vom Seitenverhältnis der Platten dargestellt. Die Widerstandszahl ändert sich von 1,1 (quadratische Platte) bis 2,0 (unendlich lange Platte). Auch hier zeigt sich wieder die bereits beim Zylinder beobachtete Erscheinung, daß bei unendlich langen Platten, also bei ebener Strömung, die Widerstandszahl bedeutend höhere Werte erreicht, als bei der räumlichen Strömung, bei welcher offenbar durch die seitliche Umströmung der Widerstand vermindert wird. Dieser Unterschied ist von ähnlicher Größe wie bei den verschieden langen Zylindern; die Widerstandszahl der unendlich langen Platte ist fast doppelt so groß, wie diejenige der quadratischen Platte.

Göttingen, Aerodynamische Versuchsanstalt, März 1922.

(Eingegangen 31. März 1922.)

Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1922.

Technische Hochschule Karlsruhe. Gaede: Physik II. 2, IV, 2; Physikalisches Laboratorium (mit Schachenmeier), 6. — **Lehmann**: Flüssige Kristalle, 1. — **Peppler**: Allgemeine Meteorologie, 2. — **Schachenmeier**: Mathematische Physik, 3; Experimentalphysik, für Pharmazeuten, 2; Repetitorium der Physik, 2. —

N. N.: Anorganische Experimentalchemie, 5; Chemisches Kolloquium, 1; Chemisches Laboratorium, tägl. außer Sonnabend. — **Bredig**: Überblick über die theoretische und technische Elektrochemie, 4; Ausgewählte Kapitel der physikalischen und anorganischen Chemie, 1; Demonstrationen technisch-elektrochemischer Prozesse (mit Koenig), 2; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Kolloquium für Vorgeschrittene, 2; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Physikalisch-chemischer und elektrochemischer Einführungskurs, mit einleitenden Vorträgen. — **Askenasy**: Spezielle chemische Technologie und technische Elektrochemie, 2; Arbeiten im chemisch technischen Laboratorium, tägl.; Chemisch-technisches Seminar, nach Vereinbarung; Arbeiten über mineralische Gerbung, nach Vereinbarung. — **Eitner**: Chemische Technologie des Wassers und der Beleuchtung, 2; Methoden der technischen Analyse für Chemiker II, 2, Übungen; Ausgewählte Kapitel der technischen Analyse, 1, Übungen, 3; Chemische und physikalische Grundlagen der technischen Analyse II, 1, Übungen, 2. — **Lehne**: Textilchemie I, 2, Übungen, 2; Textilchemische Erfindungen mit Erläuterungen des Patentrechts, 1; Das Bedrucken und Appretieren der Gewebe, 1, Übungen, 2; Chemisch-technisches Laboratorium, Textilchemische Abteilung. — **Franzen**: Organische Chemie II, 2; Biochemie, 1. — **v. Antropoff**: Atombau und periodisches System der Elemente, 2; Metallographisches Praktikum, 2. — **Klever**: Industrie der Schwelerei- und Schmieröltechnik, 2; Chemie des Bitumens I, 1; Seminar über neuere Arbeiten der Bitumenchemie, 1. — **Kögel**: Photochemie der Silberhalogene, 2, Übungen, 2—4. — **Koenig**: Elektrochemie der Gase, 2. — **Lembert**: Analytische Chemie II; Theoretische Grundlagen und Seminar, 2. — **Reis**: Photochemie: Physikalische und chemische Wirkungen des Lichts, 2. — **Übbelohde**: Industrie der Fette und Harze, 2. —

Krazer: Höhere Mathematik II, mit Übungen, 6; Analytische Geometrie des Raumes, 2; Geometrische Transformationen, Mathematisches Seminar (mit Baldus und Böhm), 2 g. — **Baldus**: Darstellende Geometrie, 4, Übungen, 4; Konstruktive Übungen der Perspektive, 3. — **Böhm**: Grundlehren der höheren Mathematik, 4, Übungen, 1; Partielle Differentialgleichungen, 1; Prinzipien der Mechanik, 2. — **Heun**: Mechanik II, 4, Übungen, 2; Mechanisches Seminar, 3 g. — **Breuer**: Ebene und sphärische Trigonometrie, 3, Übungen, 2; Mathematik des Wirtschaftslebens II: Versicherungsmathematik, 1. — **Wellstein**: Projektive und analytische Geometrie, 2, Übungen 2. — **Wintz**: Algebraische Kurven, 1; Kartenprojektion, 1, Übungen, 2. —

Tagesereignisse.

v. Reinach-Preis für Mineralogie. Ein Preis von 1000 Mark soll der besten Arbeit zuerkannt werden, die einen Teil der Mineralogie des Gebietes zwischen Aschaffenburg, Heppenheim, Alzey, Kreuznach, Koblenz, Ems, Gießen und Büdingen behandelt; nur wenn es der Zusammenhang erfordert, dürfen andere Landesteile in die Arbeit einbezogen werden.

Die Arbeiten, deren Ergebnisse noch nicht anderweitig veröffentlicht sein dürfen, sind bis zum 1. Oktober 1923 in versiegeltem Umschlage, mit Motto versehen, an die unterzeichnete Stelle einzureichen. Der Name des Verfassers ist in einem, mit gleichem Motto versehenen zweiten Umschlage beizufügen.

Die Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft hat die Berechtigung, diejenige Arbeit, der der Preis zuerkannt wird, ohne weiteres Entgelt in ihren Schriften zu veröffentlichen, kann aber auch dem Autor das freie Verfügungsrecht überlassen. Nicht preisgekrönte Arbeiten werden den Verfassern zurückgesandt.

Über die Zuerteilung des Preises entscheidet bis spätestens Ende Februar 1924 die unterzeichnete Direktion auf Vorschlag einer von ihr noch zu ernennenden Prüfungskommission.

Frankfurt a. M., Viktoria-Allee 7, 1. April 1922.

Die Direktion der Senckenbergischen Naturforschenden Gesellschaft.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Erlangen Dr. G. Scheibe für Chemie.

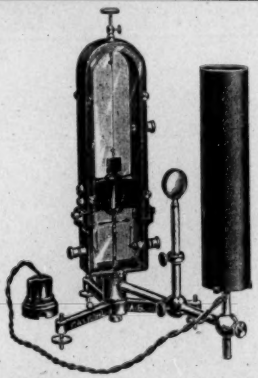
Ernannt: An der National-Polytechnischen Hochschule in Athen Dr. Procopios Zacharias zum a. o. Professor der Physikalischen Chemie, Dr. Theodor Stathopulos zum a. o. Professor der Nahrungsmittelchemie und Dr. Starcos Hors zum a. o. Professor der analytischen Chemie, der a. o. Professor an der Montanistischen Hochschule in Leoben Dr. Hans Fleißner zum ord. Professor der allgemeinen und analytischen Chemie an der Deutschen Technischen Hochschule Prag, Professor The Svedberg von der Universität Upsala zum Organisator und Leiter der Abteilung für Kolloidchemie an der Universität von Wisconsin, Privatdozent an der Universität München Dr. Adolf Kratzer zum ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Münster.

In den Ruhestand: Der a. o. Professor der technischen Chemie an der Universität Jena Dr. Eduard Vongerichten.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Erich Hückel in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Max Kohl A.G. Chemnitz

Volleingezahltes Kapital Mk. 2400000.



61392. Drehspul-Spiegelgalvanometer.

Physikalische Apparate

Funken-Induktoren
Ölluftpumpen
Experimentier-Schalttafeln
Projektions-Apparate
Laboratorienmöbel

In gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel 1910: 4 Grosse Preise; Turin 1911: 2 Grosse Preise; Dresden 1911: Grosser Preis.

CARL LEISS

OPTISCHE ANSTALT

BERLIN-STEGLITZ

STUBENRAUCH-PLATZ 1

Spektroskope

Spektral-Apparate
mit Wellenlängentrommel (D.R.G.M.)

Monochromatoren
mit Wellenlängentrommel (D.R.G.M.)

Neuer Ultraviolett-Monochromator (D.R.G.M.)

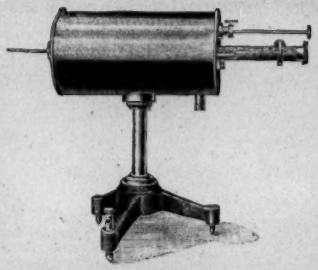
Neue Universal-Monochromatoren

Spektrographen
mit Glas- und Quarz-Optik

Gitter-Spektrographen
mit Glas- und Quarzgitter

Spektrometer und Refraktometer

Phosphoroskop nach Lenard



Apparate für luftelektrische u. radioaktive Untersuchungen.

Normalbatterie für elektrostatische Messungen.

Kondensatoren, Mikrowage.

Erdbebenregistrierapparate.

Spindler & Hoyer G. m. b. H.
Mechan. u. opt. Werkstätten
Göttingen 3.

Inhaltsverzeichnis:

(B. = Besprechungen; T. = Tagesereignisse.)

	Seite
Aggregatzustände: Die —, v. G. Tammann. (B.)	235
Beugungsinterferenz: Eine eigentümliche —, v. K. Noack	228
Binokulare Instrumente: Die —, v. M. v. Rohr. (B.)	237
Elektrizität: Handbuch der — und des Magnetismus. IV, 3. (B.)	238
Elektrotechnik: Hilfsbuch für die —, v. K. Strecker. (B.)	236
Farbstofflösungen: Polarisierte Fluoreszenz von —, v. G. C. Schmidt	233
Fluoreszenz: Polarisierte — von Farbstofflösungen, v. G. C. Schmidt	233
Fluoreszenzlicht: Über polarisiertes —, v. F. Weigert	232
Förster, F., Elektrochemie wässeriger Lösungen. (B.)	239
Gase: Versuche über das Nachleuchten von Röhren mit verdünnten —, v. A. Steichen	229
Grimsehl, E., Lehrbuch der Physik. (B.)	239
Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus. IV, 3. (B.)	238
Jena: Ferienkurse in — für Damen und Herren, 2. bis 15. August 1922. (T.)	240
Keesom, W. H., Die Berechnung der molekularen Quadrupolmomente aus der Zustandsgleichung	225
Kinematographie: Wissenschaftliche —, v. F. P. Liesegang. (B.)	237
Kugelphotometer: Das —, v. R. Ulbricht. (B.)	237
Liesegang, F. P., Wissenschaftliche Kinematographie (B.)	237
Magnetismus: Handbuch der Elektrizität und des —. IV, 3. (B.)	238
Meth, P., Theorie der Planetenbewegung. (B.)	239
Nachleuchten: Versuche über das — von Röhren mit verdünnten Gasen, v. A. Steichen	229
Noack, K., Eine eigentümliche Beugungsinterferenz	228
Physik: Lehrbuch der —, v. E. Grimsehl. (B.)	239
Planetenbewegung: Theorie der —, v. P. Meth. (B.)	239
Quadrupolmomente: Die Berechnung der molekularen — aus der Zustandsgleichung, v. W. H. Keesom	225
Radiotelegraphisches Praktikum, v. H. Rein. (B.)	236
Rein, H., Radiotelegraphisches Praktikum. (B.)	236
v. Rohr, M., Die binokularen Instrumente (B.)	237
Schmidt, G. C., Polarisierte Fluoreszenz von Farbstofflösungen	233
Skirl, W., Meßgeräte und Schaltungen für Wechselstromleistungsmessungen. (B.)	236
Steichen, A., Versuche über das Nachleuchten von Röhren mit verdünnten Gasen	229
Strecker, K., Hilfsbuch für die Elektrotechnik. (B.)	236
Tammann, G., Aggregatzustände. (B.)	235
Ulbricht, R., Das Kugelphotometer. (B.)	237
Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1922	240
Wässerige Lösungen: Elektrochemie —, v. F. Förster. (B.)	239
Wechselstromleistungsmessungen: Meßgeräte und Schaltungen für —, v. W. Skirl. (B.)	236
Weigert, F., Über polarisiertes Fluoreszenzlicht	232
Wien, W., Aus der Welt der Wissenschaft. (B.)	239
Zustandsgleichung: Die Berechnung der molekularen Quadrupolmomente aus der —, v. W. H. Keesom	225

Einbanddecken zur Physikalischen Zeitschrift 1921 sind vorrätig und können zum Preise von M. 30.— durch jede Buchhandlung oder vom Verlag S. Hirzel in Leipzig, Königstr. 2 bezogen werden.

Elektro-Ingenieur oder Physiker

gesucht, mit guten allgemeinen Kenntnissen in der Elektrotechnik, für die kritische Durchsicht der eingehenden Fachliteratur. Offerten unter **S. H. 599** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstraße 2 erbeten.

Für die Literarische Abteilung

einer größeren Berliner Elektrizitätsgesellschaft wird ein **Elektro-Ingenieur oder Physiker** mit guten Kenntnissen in der Elektrotechnik gesucht, der nach erfolgter Einarbeitung über Themata aus dem Gebiete des Fernmeldewesens, der Meßtechnik und der Elektromedizin gewandt schreiben kann. Offerten unter **S. H. 598** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstraße 2 erbeten.